Schwierige

Betrags(un)gleichungen

Aufgabensammlung

Teilweise mit zwei Beträgen

Datei Nr. 12162

Stand: 11. Mai 2018

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Gerade in der Oberstufe kommen schwierigere Aufgaben vor, zu denen man dann keine Methode mehr weiß. Von den Anforderungen her kann man diese Aufgaben problemlos in den Klassenstufen 8 oder 9 lösen. Auch Studenten wissen oft nicht mehr weiter …

Ich gebe hier meistens zwei Methoden an. Die Parabelmethode setzt voraus, dass man Nullstellen zu quadratischen Funktionen berechnen kann (quadratische Ergänzung oder Mitternachtsformel).

Aufgabensammlung

Bestimme die Lösungsmenge

(1) $|x-2| = |3x-4|$

(2) $|x-2| \le |3x-4|$

(3) $|x-2| \le |3x-4|$

(4) $|4-5x| \ge |3x+10|$

(5) $|5x+1| < |2x+5|$

(6) $|3-4x| \ge |6x+1|$

(7) $|x^2+x-2| < 4$

(8) $|x^2-2x-4| < 4$

(9) $\sqrt{x+3} < |x+1|$

(10) $|x+2| - |x-2| \ge 2$

(11) $||x+1|-2| < 1$

(12) $|x^2+x-2| > |1-x^2|$

Lösungen

(1) $|x-2| = |3x-4|$

Ausführliche Musterlösung (übertragbar auf die anderen Lösungen)

1. Lösung: Vorzeichentabelle anlegen

		$\frac{4}{3}$		2	
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$3x-4$	$-$	0	$+$		$+$

Mit der Vorzeichentabelle wird ermittelt, in welchen Intervallen die Betragsargumente positiv sind (dann kann man den Betrag weglassen), bzw. negativ sind, dann ersetzt man den Betrag durch eine Klammer, die dann subtrahiert werden muss.

Für $x > 2$ sind beide Argumente positiv. Daher lässt man für dieses Intervall den Betrag weg und rechnet:

$$x-2 = 3x-4$$
$$-2x = -2 \quad \text{d. h.} \quad x_1 = 1$$

Nun erfüllt 1 nicht Bedingung x > 2. Doch diese galt nur für die betragsfreie Darstellung der Gleichung. Die Probe zeigt, dass 1 eine Lösung ist!

Für $\frac{4}{3} < x < 2$ hat x - 2 negative Werte. Statt des Betrages wird eine Klammer subtrahiert. 3x – 4 hat dagegen noch positive Werte, weshalb man den Betrag dort weglassen kann:

$$\mathbf{-(x-2)} = 3x-4$$
$$-x+2 = 3x-4$$
$$-4x = -6$$
$$x_2 = \tfrac{3}{2}$$

Für $x < \frac{4}{3}$ sind beide Argumente negativ. Man kann also den Betrag durch eine Klammer und ein Minuszeichen ersetzen:

$$-(x-2) = -(3x-4)$$
$$x_1 = 1$$

<u>Lösungsmenge</u>: $\mathbf{L} = \left\{ \tfrac{3}{2}; 1 \right\}$

2. Lösung: Die Gleichung quadrieren

Quadriert man die Betragsgleichung, entsteht eine quadratische Gleichung:

$$|x-2| = |3x-4|$$
$$(x-2)^2 = (3x-4)^2$$
$$x^2-4x+4 = 9x^2-24x+16$$
$$-8x^2+20x-12 = 0 \quad | :(-4)$$
$$2x^2-5x+3 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4} = \begin{cases} \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ \frac{4}{4} = 1 \end{cases}$$

Lösungsmenge: $\mathbf{L} = \left\{ \tfrac{3}{2}; 1 \right\}$

(2) $|x-2| \le |3x-4|$

WISSEN: Gilt $0 < a < b$ (also a und b sind positiv), dann bleibt beim Quadrieren die Richtung der Ungleichung erhalten: $\boxed{a < b \quad \Rightarrow \quad a^2 < b^2}$ Der Grund dafür ist, dass die Quadratfunktion $f(x) = x^2$ für $x \ge 0$ streng monoton wächst.

Beide Seiten sind positiv, also darf man quadrieren:

$$(x-2)^2 \le (3x-4)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 \le 9x^2 - 24x + 16$$

$$-8x^2 + 20x - 12 \le 0 \quad | :(-8)$$

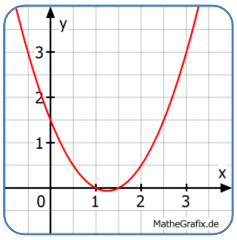
$$x^2 - \tfrac{5}{2}x + \tfrac{3}{2} \ge 0$$

Für die Lösung dieser quadratischen Ungleichung schlage ich zwei Methoden vor:

1. Lösungsweg: ***Parabelmethode:*** Für welche x hat $y = x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$ positive Werte?

Diese Parabel hat die Nullstellen: $x_{1,2} = \dfrac{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4 \cdot \frac{3}{2}}}{2} = \dfrac{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}}}{2} = \dfrac{\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}}{2} = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ 1 \end{cases}$

Zwischen den Nullstellen hat sie negative Werte, außen positive.
Der linke Außenbereich ist $]-\infty; 1]$, der rechte $[\frac{3}{2}; \infty[$.



Die Lösungsmenge ist deren Vereinigungsmenge:

$\mathbf{L} =]-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; \infty[$ oder so:

$\mathbf{L} = \mathbb{R} \setminus]1; \frac{3}{2}[$, also alle reellen Zahlen ohne den Innenbereich.

2. Lösungsweg: **Quadratische Ergänzung:** Siehe Text 12227

$x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} \ge 0$ ($\frac{5}{2}$ halbieren und das Quadrat links und rechts ergänzen)

$\left(x^2 - \frac{5}{2}x + \boxed{\left(\frac{5}{4}\right)^2}\right) \ge -\frac{3}{2} + \boxed{\left(\frac{5}{4}\right)^2}$ Nun zusammenfassen:

$$\left(x - \tfrac{5}{4}\right)^2 \ge -\tfrac{24}{16} + \tfrac{25}{16}$$

$$\left(x - \tfrac{5}{4}\right)^2 \ge \tfrac{1}{16} \quad | \sqrt{}$$

$$\left|x - \tfrac{5}{4}\right| \ge \tfrac{1}{4} \quad | \text{ Betragsungleichung auflösen}$$

$x - \frac{5}{4} \le -\frac{1}{4}$ oder $x - \frac{5}{4} \ge \frac{1}{4}$ (Siehe Text 12161 Seite 7)

d. h. $x \le \frac{5}{4} - \frac{1}{4} = 1$ oder $x \ge \frac{5}{4} + \frac{1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$\mathbf{L} = \mathbb{R} \setminus]1; \frac{3}{2}[=]-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; \infty[$